Uitwerking

Opg. 1 / De D.V. $y' + \cos(x)\, y = 2x\, e^{-\sin(x)}$ is lineair
dus bepaal eerst een integrerende factor.
Een integrerende factor is $I(x) = e^{\int \cos x\, dx} = e^{\sin x}$
Los vervolgens op:

$$e^{\sin x} y' + \cos(x) \cdot e^{\sin x} y = 2x$$

$$\Rightarrow \left(y \cdot e^{\sin x}\right)' = 2x \Rightarrow y e^{\sin x} = x^2 + C \text{ met } C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y(x) = (x^2 + C)\, e^{-\sin x} \quad \text{met } C \in \mathbb{R}$$

Verwerk tenslotte de BVW $y(\pi) = 0$

$$\Rightarrow \pi^2 + C = 0 \Rightarrow C = -\pi^2$$

De gezochte oplossing is derhalve $\boxed{y(x) = (x^2 - \pi^2)\, e^{-\sin x}}$

Opg. 2 / De D.V. $\sqrt{x^2+1}\, \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$ is separabel,
dus pas scheiding van variabelen toe

$$\Rightarrow y\, y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \int y \cdot y'\, dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

$$\Rightarrow \int y\, dy = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$$

stel $x^2 + 1 = u$
dan $\dfrac{du}{dx} = 2x$
dus $x\, dx = \frac{1}{2} du$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} y^2 = \sqrt{u} + C \text{ met } C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y^2 = 2\sqrt{x^2+1} + k \text{ met } k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm \sqrt{2\sqrt{x^2+1} + k}$$

met $k \in \mathbb{R}$

Verwerk tenslotte de BVW $y(\sqrt{3}) = 2$

$$\Rightarrow \sqrt{4 + k} = 2$$

(we moeten uiteraard voor het plus-teken kiezen)

$$\Rightarrow k = 0$$

De gezochte oplossing is derhalve $\boxed{y(x) = \sqrt{2\sqrt{x^2+1}}}$

Opg. 3/

$$\left|\frac{2ie^{i\varphi}+4}{2e^{i\varphi}-i}\right| = \frac{|2i(\cos\varphi + i\sin\varphi)+4|}{|2(\cos\varphi+i\sin\varphi)-i|} =$$

$$\frac{|4-2\sin\varphi+2\cos\varphi . i|}{|2\cos\varphi+(2\sin\varphi-1)i|} =$$

$$\frac{\sqrt{(4-2\sin\varphi)^2+4\cos^2\varphi}}{\sqrt{4\cos^2\varphi+(2\sin\varphi-1)^2}} = \frac{\sqrt{16-16\sin\varphi+4}}{\sqrt{4-4\sin\varphi+1}}$$

Gebruik $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$

$$=\sqrt{\frac{20-16\sin\varphi}{5-4\sin\varphi}} = \sqrt{4} = \boxed{2}$$

Opg. 4/ a) Subst. van $y(t)=e^{Rt}$ in $y''+2y'+y=0$ geeft $R^2+2R+1=0 \iff (R+1)^2=0$
$\iff R=-1$ (tweemaal)
Derhalve zijn e^{-t} en te^{-t} twee basisopl^n
en is $\boxed{y(t)=C_1e^{-t}+C_2te^{-t} \text{ met } C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$
de algemene oplossing v/d. homogene LDV.

b) Zoek eerst een particuliere oplossing v/d vorm $y_p(t)=ae^{2t}+bte^{2t}$, dan $y_p'(t)=(2a+b)e^{2t}+2bte^{2t}$
en $y_p''(t)=(4a+4b)e^{2t}+4bte^{2t}$.
Invullen in de gegeven LDV levert op
$9a+6b=15$ en $9b=9$, dus $b=1$ en $a=1$.
Bijgevolg is $y_p(t)=e^{2t}+te^{2t}$ een particuliere oplossing v/d inhomogene LDV en is
$\boxed{y(t)=e^{2t}+te^{2t}+C_1e^{-t}+C_2te^{-t} \text{ met } C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$
de algemene oplossing.